第28卷 第3期
2011年06月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 28 No. 3
June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0315-08

半马尔可夫过程在 $GI/M/1$ 和 $M/G/1$ 排队系统中的应用*

董海玲[1]， 侯振挺[2]， 江国朝[3]

(1- 深圳大学数学与计算科学学院，深圳 518060； 2- 中南大学数学科学与计算技术学院，长沙 410075；
3- 哈尔滨工业大学深圳研究生院经管学科部，深圳 518055)

摘 要: 本文运用齐次可列半马尔可夫过程的向后方程和向前方程，分别研究了 $GI/M/1$ 和 $M/G/1$ 排队系统队长的瞬时分布．首先得到了 $GI/M/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向后方程组，然后得到了 $M/G/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向前方程组，所得方程组的系数矩阵都是拟下三角矩阵，都可以通过迭代法进行求解．

关键词: 齐次可列半马尔可夫过程；$GI/M/1$ 排队系统；$M/G/1$ 排队系统；向后方程组；向前方程组

分类号: **AMS**(2000) 60K15; 60K25　　**中图分类号**: O211.62　　**文献标识码**: A

1 引言

排队系统是运筹学一个重要分支，目前已经得到了广泛的发展，形成了一个独立的研究方向，近几年研究成果参见文献 [1-5] 等，我国数学家越民义、徐光辉、田乃硕等在排队论方向做了大量的研究工作．

关于 $GI/M/1$ 排队系统和 $M/G/1$ 排队系统的队长问题，不少学者已经作了大量研究，但大多是通过嵌入马尔可夫链对它们进行研究，参见文献 [6,7] 等，而本文是运用齐次可列半马尔可夫过程的向后方程和向前方程，分别对 $GI/M/1$ 和 $M/G/1$ 排队系统队长的瞬时分布进行研究．分别得到了 $GI/M/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向后方程组，和 $M/G/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向前方程组．而且，由于所得方程组的系数矩阵都是拟下三角矩阵，所得方程组都可以通过迭代法进行求解．

2 齐次可列半马尔可夫过程的向前向后方程

定义 1[8] 令 E 为一可数集，$X=\{X(t,\omega),0\le t<\tau\}$ 称为齐次可列半马尔可夫过程，如果满足：

1) $\tau_0=0$, $\tau_1=\inf\{t>0,X(t)\neq X(0)\}$, $\tau_{n+1}=\inf\{t>\tau_n,X(t)\neq X(\tau_n)\}$, $n>1$, $\tau_n\uparrow\tau$;
2) $P\{X(\tau_{n+1})\in A\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}\}=P\{X(\tau_{n+1})\in A\,|\,X(\tau_n)\}$, $n=0,1,2,\cdots$;
3) $X(t,\omega)=X(\tau_n,\omega)$, $\tau_n\le t<\tau_{n+1}$, $n=0,1,2,\cdots$.

收稿日期: 2009-10-20. **作者简介**: 董海玲 (1981年10月生)，女，博士，讲师. 研究方向：随机过程、排队论、保险.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (11071258)；国家自然科学基金青年基金 (11001179).

对任意的 $i,\, j \in E$ 及 $t \in R_+$，令

$$h_{ij}(t) := P\big(X(t) = j,\, t < \tau_1 \,|\, X(0) = i\big), \qquad P_{ij}(t) := P\big(X(t) = j \,|\, X(0) = i\big),$$

$$Q_{ij}^{(n)}(t) := P\big(X(\tau_n) = j,\, \tau_n \le t \,|\, X(0) = i\big), \quad Q_i(t) := P\big(\tau_1 \le t \,|\, X(0) = i\big),$$

$$G_{ij}(t) := P\big(\tau_{n+1} - \tau_n \le t \,|\, X(\tau_n) = i,\, X(\tau_{n+1}) = j\big), \quad i \ne j.$$

对应的Laplace变换记为

$$h_{ij}(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} h_{ij}(t)\mathrm{d}t, \qquad P_{ij}(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} P_{ij}(t)\mathrm{d}t,$$

$$Q_i(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q_i(\mathrm{d}t), \qquad Q_{ij}^{(n)}(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} Q_{ij}^{(n)}(\mathrm{d}t).$$

定理1[9] $\{P_{ij}(t),\, i,j \in E,\, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$P_{ij}(t) = h_{ij}(t)\delta_{ij} + \sum_{k \ne i} \int_0^t Q_{ik}(\mathrm{d}s) P_{kj}(t-s), \quad i,\, j \in E, \quad \lambda \in R_+. \tag{1}$$

定理2[9] $\{P_{ij}(\lambda),\, i,j \in E,\, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$P_{ij}(\lambda) = h_{ij}(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k \ne i} Q_{ik}(\lambda) P_{kj}(\lambda), \quad i,\, j \in E, \quad \lambda \in R_+, \tag{2}$$

方程(1)和(2)都称为齐次可列半马尔可夫过程的向后方程.

定理3[9] 如果存在满足等式 $\hat{Q}_{ij}(\lambda) = (h_i(\lambda))^{-1} Q_{ij}(\lambda) h_j(\lambda)$ 的 $\hat{Q}_{ij}(\lambda)$，则 $\{P_{ij}(\lambda),\, i,j \in E,\, \lambda \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$P_{ij}(\lambda) = h_{ij}(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k \ne j} P_{ik}(\lambda)\big(h_k(\lambda)\big)^{-1} Q_{kj}(\lambda) h_j(\lambda), \quad i,\, j \in E, \quad \lambda \in R_+, \tag{3}$$

方程(3)称为齐次可列半马尔可夫过程的向前方程.

3 将齐次可列半马尔可夫过程的向后方程应用于 $GI/M/1$ 排队系统

定义2[10] 所谓 $GI/M/1$ 排队系统，即顾客逐个到达，并且到达间隔相互独立，服从相同的分布 $B(x)$，按照先到先服务的原则接受服务，只有一个服务台，每个顾客的服务时间服从参数为 μ 的指数分布.

设 Y_n 表示第 n 个顾客到达系统时看到系统中的顾客数(不包括他自己)，易知 $\{Y_n, n \ge 0\}$ 是一马尔可夫链. 设 $\gamma_0 = 0$ 时恰好到达一个顾客，γ_n 为第 n 个顾客到达的时间，则 $\{(Y_n, \gamma_n), n \ge 0\}$ 构成一马尔可夫更新过程. 令 $Y(t) = Y_n$，$\gamma_n \le t < \gamma_{n+1}$，则 $Y(t)$ 为 $\{(Y_n, \gamma_n), n \ge 0\}$ 伴随的齐次可列半马尔可夫过程，而 $\{Y_n, n \ge 0\}$ 为 $\{Y(t), t \ge 0\}$ 的嵌入马尔可夫链.

由定义1，对顾客到达的时间序列 $\{\gamma_n\}$ 进行选择，去掉拟跳，取有顾客到达，过程的状态真正发生转移的时刻为骨架时序列. 在不引起误解时，我们把这个序列也记为：$\{\gamma_n\}$.

由半马尔可夫核的定义可得

$$Q_{ij}(t) = P\big(Y(\gamma_{n+1}) = j,\, \gamma_{n+1} - \gamma_n \le t \,|\, Y(\gamma_n) = i\big).$$

当 $j \neq i$, $j > 0$ 时，由 $Y(t)$ 的齐次性可得

$$\begin{aligned} q_{i+1-j}(t) =: Q_{ij}(t) &= P\big(Y(\gamma_{n+1}) = j,\, \gamma_{n+1} - \gamma_n \le t \,|\, Y(\gamma_n) = i\big) \\ &= P\big(Y(\gamma_1) = j,\, \gamma_1 - 0 \le t \,|\, Y(0) = i\big) \\ &= \int_0^t P\big\{[0,x) \text{ 离开了 } i+1-j \text{ 个人}\big\} P\{\gamma_1 \in \mathrm{d}x\} \\ &= \int_0^t \frac{(\mu x)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \mathrm{e}^{-\mu x} \mathrm{d}B(x), \end{aligned}$$

显然要求 $i+1-j \ge 0$，即 $j \le i+1$ 上式才有定义．当 $j \neq i$, $j = 0$ 时

$$r_i(t) =: Q_{i0}(t) = Q_i(t) - \sum_{j \neq i, j > 0} Q_{ij}(t) = Q_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^{i+1} q_{i+1-j}(t) = B(t) - \sum_{k=0, k \neq 1}^{i} q_k(t),$$

其中 $Q_i(t) = P(\gamma_1 \le t \,|\, Y(0) = i)$，因为到达间隔服从相同分布 $B(t)$，与起点所处状态无关，所以 $Q_i(t) = B(t)$．于是 $GI/M/1$ 排队系统的队长 $Y(t)$ 对应的半马尔可夫核为

$$\big[Q_{ij}(t)\big] = \begin{bmatrix} 0 & q_0(s) & 0 & 0 & \cdots \\ r_1(s) & 0 & q_0(s) & 0 & \cdots \\ r_2(s) & q_2(s) & 0 & q_0(s) & \cdots \\ r_3(s) & q_3(s) & q_2(s) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

上述结果和文献 [10] 中所得 $GI/M/1$ 排队系统对应的半马尔可夫核的结果是一致的，只是去掉了拟跳的情形．$Y(t)$ 对应的半马尔可夫核对应的矩阵是拟下三角的，用向后方程容易求解．

令 $P_{ij}(t) = P(Y(t) = j \,|\, Y(0) = i)$，可得下述定理．

定理 4　对于 $GI/M/1$ 排队系统，$\{P_{ij}(t),\, i,j \in E,\, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$\begin{cases} P_{0j}(t) = \big(1 - B(t)\big)\delta_{0j} + \displaystyle\int_0^t P_{1j}(t-s)B(\mathrm{d}s), \\ P_{ij}(t) = \mathrm{e}^{-\mu x}\big(1 - B(t)\big)\delta_{ij} + \displaystyle\sum_{m=0, m\neq 1}^{i+1} \int_0^t \tfrac{(\mu s)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\mu s} P_{i+1-m,j}(t-s)B(\mathrm{d}s). \end{cases}$$

证明　对于 $GI/M/1$ 系统，可得

$$h_0(t) := h_{00}(t) = P\big(Y(t) = 0,\, t < \gamma_1 \,|\, Y(0) = 0\big) = 1 - B(t). \tag{4}$$

当 $i \neq 0$ 时，有下面的式子成立

$$h_i(t) := h_{ii}(t) = P\big(Y(t) = j,\, t < \gamma_1 \,|\, Y(0) = i\big) = \mathrm{e}^{-\mu x}\big(1 - B(t)\big), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t Q_{i0}(\mathrm{d}s)P_{0j}(t-s) &= \int_0^t r_i(\mathrm{d}s)P_{0j}(t-s)\\ &= \int_0^t P_{0j}(t-s)B(\mathrm{d}s) - \sum_{k=0,k\neq 1}^{i}\int_0^t q_k(\mathrm{d}s)P_{0j}(t-s)\\ &= \int_0^t \Big[\sum_{k=0,k\neq 1}^{i+1}\frac{(\mu s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu s} - \sum_{k=0,k\neq 1}^{i}\frac{(\mu s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu s}\Big]P_{0j}(t-s)B(\mathrm{d}s)\\ &= \int_0^t \frac{(\mu s)^{i+1}}{(i+1)!}\mathrm{e}^{-\mu s}P_{0j}(t-s)B(\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{6}$$

对任意的i，下式成立

$$\begin{aligned}\sum_{k=1,k\neq i}^{i+1}\int_0^t Q_{ik}(\mathrm{d}s)P_{kj}(t-s) &= \sum_{k=1,k\neq i}^{i+1}\int_0^t q_{i+1-k}(\mathrm{d}s)P_{kj}(t-s)\\ &= \sum_{m=0,m\neq 1}^{i}\int_0^t q_m(\mathrm{d}s)P_{i+1-m,j}(t-s)\\ &= \sum_{m=0,m\neq 1}^{i}\int_0^t \frac{(\mu s)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\mu s}P_{i+1-m,j}(t-s)B(\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{7}$$

由定理1和(4)-(7)式，可得本定理成立.

令

$$r_i(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}r_i(\mathrm{d}t),\quad i=1,2,\cdots,\quad q_i(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}q_i(\mathrm{d}t),\quad i\in N,\quad i\neq 1.$$

定理5 对于$GI/M/1$排队系统，$\{P_{ij}(\lambda),\, i,j\in E,\, t\in R_+\}$是下述方程的最小非负解

$$\begin{cases} P_{0j}(\lambda)=h_0(\lambda)\delta_{0j}+q_0(\lambda)P_{1j}(\lambda),\\ P_{1j}(\lambda)=h_1(\lambda)\delta_{1j}+r_1(\lambda)P_{0j}(\lambda)+q_0(\lambda)P_{2j}(\lambda),\\ P_{2j}(\lambda)=h_2(\lambda)\delta_{2j}+r_2(\lambda)P_{0j}(\lambda)+q_2(\lambda)P_{1j}(\lambda)+q_0(\lambda)P_{3j}(\lambda),\\ P_{3j}(\lambda)=h_3(\lambda)\delta_{3j}+r_3(\lambda)P_{0j}(\lambda)+q_3(\lambda)P_{1j}(\lambda)+q_2(\lambda)P_{2j}(\lambda)+q_0(\lambda)P_{4j}(\lambda),\\ \cdots,\\ P_{ij}(\lambda)=h_i(\lambda)\delta_{ij}+r_i(\lambda)P_{0j}(\lambda)+\sum\limits_{m\neq 1,m=0}^{i}q_m(\lambda)P_{i+1-m,j}(\lambda),\\ \cdots. \end{cases}$$

证明 由定理2和$GI/M/1$半马尔可夫核对应的矩阵可得

$$\begin{aligned}P_{0j}(\lambda) &= h_0(\lambda)\delta_{0j}+\sum_{k\neq 0}Q_{0k}(\lambda)P_{kj}(\lambda)\\ &= h_0(\lambda)\delta_{0j}+\sum_{k\neq 0,k=1}^{0+1}q_{0+1-k}(\lambda)P_{kj}(\lambda)=h_0(\lambda)\delta_{0j}+q_0(\lambda)P_{1j}(\lambda). \end{aligned} \tag{8}$$

当 $i \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} P_{ij}(\lambda) &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k\neq i} Q_{ik}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\ &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + Q_{i0}(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{k\neq i,k=1}^{i+1} Q_{ik}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\ &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + r_i(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{k\neq i,k=1}^{i+1} q_{i+1-k}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\ &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + r_i(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{m\neq 1,m=0}^{i} q_m(\lambda)P_{i+1-m,j}(\lambda). \end{aligned} \tag{9}$$

由定理2和(8),(9)式，可得本定理成立.

由定理5可知，$\{P_{ij}(\lambda),\, i,j \in E,\, t \in R_+\}$ 满足的向后方程组对应的系数矩阵是拟下三角的，可以用迭代法进行求解.

4 将齐次可列半马尔可夫过程的向前方程应用于 $M/G/1$ 排队系统

定义 3[10] 所谓 $M/G/1$ 排队系统，即顾客逐个到达，并且到达的间隔服从参数为 λ 的指数分布，按照先到先服务的原则接受服务，只有一个服务台，每个顾客的服务时间独立同分布，服从分布 $A(x)$.

设 X_n 表示第 n 个顾客离开系统时系统剩余中的顾客数(不包括离开的这个人)，易知 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一马尔可夫链. 设 $\tau_0 = 0$ 时恰有一个顾客离开，τ_n 为第 n 个顾客离开的时间，则 $\{(X_n, \tau_n), n \geq 0\}$ 构成一马尔可夫更新过程. 令 $X(t) = X_n$, $\tau_n \leq t < \tau_{n+1}$，则 $X(t)$ 为 $\{(X_n, \tau_n), n \geq 0\}$ 的伴随的齐次可列半马尔可夫过程，而 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的嵌入马尔可夫链.

由定义1，对顾客离开的时间序列 $\{\tau_n\}$ 进行选择，去掉拟跳，取有顾客离开，并且过程的状态真正发生转移的时刻为骨架时序列. 在不引起误解时，我们把这个序列也记为：$\{\tau_n\}$.

由半马尔可夫核的定义可得

$$Q_{ij}(t) = P\big(X(\tau_{n+1}) = j,\, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \,|\, X(\tau_n) = i\big).$$

当 $j \neq i$, $i > 0$ 时，由 $X(t)$ 的齐次性可得

$$\begin{aligned} q_{j-i+1}(t) =: Q_{ij}(t) &= P\big(X(\tau_{n+1}) = j,\, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \,|\, X(\tau_n) = i\big) \\ &= P\big(X(\tau_1) = j,\, \tau_1 - 0 \leq t \,|\, X(0) = i\big) \\ &= \int_0^t \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}A(x), \end{aligned}$$

显然要求 $j - i + 1 \geq 0$，即 $i \leq j + 1$ 上式才有定义.

当 $j \neq i$, $i = 0$ 时

$$p_j(t) =: Q_{0j}(t) = P\big(X(\tau_1) = j,\, \tau_1 - 0 \leq t \,|\, X(0) = 0\big) = \int_0^t q_j(t - x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x.$$

于是 $M/G/1$ 排队系统对应的半马尔可夫核为

$$[Q_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & p_1(s) & p_2(s) & p_3(s) & \cdots \\ q_0(s) & 0 & q_2(s) & q_3(s) & \cdots \\ 0 & q_0(s) & 0 & q_2(s) & \cdots \\ 0 & 0 & q_0(s) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

上述结果和文献[10]中所得 $M/G/1$ 排队系统对应的半马尔可夫核的结果是一致的，只是去掉了拟跳的情形．$M/G/1$ 的半马尔可夫核对应的矩阵是拟上三角的，这种情形下，用向前方程比向后方程更容易求解．

令

$$P_{ij}(t) = P\big(X(t) = j \mid X(0) = i\big), \quad P_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} P_{ij}(t)\mathrm{d}t,$$

$$p_i(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} p_i(\mathrm{d}t), \quad i = 1, 2, \cdots, \quad q_i(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} q_i(\mathrm{d}t), \quad i \in N, \quad i \neq 1.$$

定理6 对于 $M/G/1$ 排队系统，$\{P_{ij}(\lambda),\, i, j \in E,\, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$\begin{cases} P_{i0}(\lambda) = h_0(\lambda)\delta_{i0} + P_{i1}(\lambda)\big(h_1(\lambda)\big)^{-1} q_0(\lambda) h_0(\lambda), \\ P_{i1}(\lambda) = h_1(\lambda)\delta_{i1} + P_{i0}(\lambda)\big(h_0(\lambda)\big)^{-1} p_1(\lambda) h_1(\lambda) + P_{i2}(\lambda)\big(h_2(\lambda)\big)^{-1} q_0(\lambda) h_1(\lambda), \\ P_{i2}(\lambda) = h_2(\lambda)\delta_{i2} + P_{i0}(\lambda)\big(h_0(\lambda)\big)^{-1} p_2(\lambda) h_2(\lambda) + P_{i1}(\lambda)\big(h_1(\lambda)\big)^{-1} q_2(\lambda) h_2(\lambda) \\ \qquad\qquad + P_{i3}(\lambda)\big(h_3(\lambda)\big)^{-1} q_0(\lambda) h_2(\lambda), \\ \cdots, \\ P_{ij}(\lambda) = h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)\big(h_0(\lambda)\big)^{-1} p_j(\lambda) h_j(\lambda) \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{m=0, m\neq 1}^{j} P_{i,j+1-m}(\lambda)\big(h_{j+1-m}(\lambda)\big)^{-1} q_m(\lambda) h_j(\lambda), \\ \cdots. \end{cases}$$

证明 由定理3和 $M/G/1$ 半马尔可夫核对应的矩阵可得

$$\begin{aligned} P_{i0}(\lambda) &= h_0(\lambda)\delta_{i0} + \sum_{k\neq 0} P_{ik}(\lambda)\big(h_k(\lambda)\big)^{-1} Q_{k0}(\lambda) h_0(\lambda) \\ &= h_0(\lambda)\delta_{i0} + \sum_{k\neq 0, k=1}^{0+1} P_{ik}(\lambda)\big(h_k(\lambda)\big)^{-1} q_{0-k+1}(\lambda) h_0(\lambda) \\ &= h_0(\lambda)\delta_{i0} + P_{i1}(\lambda)\big(h_1(\lambda)\big)^{-1} q_0(\lambda) h_0(\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$

当 $j \neq 0$ 时

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(\lambda) &= h_j(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k\neq j} P_{ik}(\lambda)\big(h_k(\lambda)\big)^{-1}Q_{kj}(\lambda)h_j(\lambda) \\
&= h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)\big(h_0(\lambda)\big)^{-1}Q_{0j}(\lambda)h_j(\lambda) + \sum_{k\neq j,k=1}^{j+1} P_{ik}(\lambda)\big(h_k(\lambda)\big)^{-1}Q_{kj}(\lambda)h_j(\lambda) \\
&= h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)\big(h_0(\lambda)\big)^{-1}p_j(\lambda)h_j(\lambda) + \sum_{k\neq j,k=1}^{j+1} P_{ik}(\lambda)\big(h_k(\lambda)\big)^{-1}q_{j-k+1}(\lambda)h_j(\lambda) \\
&= h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)\big(h_0(\lambda)\big)^{-1}p_j(\lambda)h_j(\lambda) \\
&\quad + \sum_{m\neq 1,m=0}^{j} P_{i,j+1-m}(\lambda)\big(h_{j+1-m}(\lambda)\big)^{-1}q_m(\lambda)h_j(\lambda). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

于是，由定理3和(10),(11)式，可得本定理成立.

由定理6可知，$\{P_{ij}(\lambda), i,j \in E, t \in R_+\}$ 满足的向前方程组对应的系数矩阵是拟下三角的，可以迭用代法进行求解，而它满足的向后方程组对应的系数矩阵是拟上三角的，不利于求解，这体现了向前方程组的应用价值.

参考文献：

[1] Ramsay C M. Exact waiting time and queue size distributions for equilibrium $M/G/1$ queues with Pareto service[J]. Queueing Systems, 2007, 57(4): 147-155

[2] Tang J S, Zhao Y Q. Stationary tail asymptotics of a tandem queue with feedback[J]. Annals of Operations Research, 2008, 160(1): 173-189

[3] Chen H Y, Li J H, Tian N S. The $GI/M/1$ queue with phase-type working vacations and vacation interruption[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30(1-2): 121-141

[4] 冯建英，吴云江. 带关闭期的随机 N-策略的 $M/G/1$ 排队系统[J]. 工程数学学报，2009, 26(3): 466-474
Feng J Y, Wu Y J. The $M/G/1$ queue under vacation policies with closedown time and the random N-policy[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(3): 466-474

[5] 唐应辉，等. 推广的 (t,T) 策略下 $M/G/1$ 排队系统队长分布的递推解及最优策略[J]. 工程数学学报，2009, 26(2): 251-259
Tang Y H, *et al.* The optimum policy and recursion solution of the queue-length distribution in $M/G/1$ queue system with generalized (t,T) policy[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(2): 251-259

[6] Kendall D G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the methods of the embedded Markov chain[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1953, 24: 338-354

[7] Liu Y Y, Hou Z T. Explicit convergence rates of the embedded $M/G/1$ queue[J]. Acta Mathematica Sinica, 2007, 23(7): 1289-1296

[8] Cinlar E. Introduction to Stochastic Processes[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1975

[9] 董海玲. 马尔可夫骨架过程极限理论[D]. 长沙：中南大学，2008
Dong H L. Limit Distribution of Markov Skeleton Processes[D]. Changsha: Central South University, 2008

[10] 邓永录，梁之舜. 随机点过程及其应用[M]. 北京：科学出版社，1992
Deng Y L, Liang Z S. Stochastic Point Processes and Their Application[M]. Beijing: Science Press, 1992

The Application of Semi-Markov Processes in $GI/M/1$ and $M/G/1$ Queuing Systems

DONG Hai-ling[1], HOU Zhen-ting[2], JIANG Guo-chao[3]

(1- School of Mathematics and Computer Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060;
2- School of Mathematics, Central South University, Changsha 410075;
3- Department of Economics and Management, HIT Shenzhen Graduate School, Shenzhen 518055)

Abstract: In this paper, the backward equations and forward equations of homogeneous denumerable semi-Markov processes are used to study the instantaneous distribution of queue lengths of $GI/M/1$ and $M/G/1$ queuing systems, respectively. For the $GI/M/1$ queuing system, the backward equations of the Laplace transform of the transition probability of its queue length are obtained. For the $M/GI/1$ queuing system, the forward equations of the Laplace transform of the transition probability of its queue length are obtained. These backward equations and forward equations, whose coefficient matrices are quasi-triangular matrices, can be easily solved by using the iterative method.

Keywords: homogeneous denumerable semi-Markov processes; $GI/M/1$ queuing system; $M/G/1$ queuing system; backward equations; forward equations

Received: 20 Oct 2009. **Accepted:** 09 Apr 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11071258); the National Natural Science Foundation for Young Scholars of China (11001179).